Zařízení sestává z jedné součástky s jistou životností. Předpokládejme, že její životnost popisuje náhodná veličina X a že tato veličina má spojité rozdělení pravděpodobnosti s hustotou f a distribuční funkcí F.

Bezporuchovost zařízení lze prodloužit tím, že po zvoleném čase t_p součástku pravidelně vyměňujeme za novou. Životnost k-té součástky popisuje náhodná veličina X_k opět s hustotou pravděpodobnosti f a distribuční funkcí F. Náhodné veličiny $X_1, X_2, \dots$ považujeme za nezávislé.

Označme písmenem T náhodnou veličinu, která popisuje bezporuchovost zařízení při pravidelné obnově součástky. Odvodíme vztah pro hustotu pravděpodobnosti f_T a distribuční funkci F_T rozdělení této náhodné veličiny T, zejména nás pak bude zajímat střední hodnota ET.

Označme $p = P[X_k < t_p]$, $q = P[X \geq t_p] = 1 - p$ a $I = \int_0^{t_p} x f(x)\,dx$. Náhodnou veličinu T vyjádříme pomocí X_k následujícím způsobem

$$T = \begin{cases} X_1 & \text{jestliže } X_1 < t_p \\ t_p + X_2 & \text{jestliže } X_1 \geq t_p, X_2 < t_p \\ 2t_p + X_3 & \text{jestliže } X_1 \geq t_p, X_2 \geq t_p, X_3 < t_p \\ \dots\dots\dots\dots & \\ kt_p + X_{k+1} & \text{jestliže } X_1 \geq t_p, X_2 \geq t_p, \dots, X_k \geq t_p, X_{k+1} < t_p. \end{cases}$$

Pro libovolné $x \in \langle 0; \infty)$ platí vzhledem k nezávislosti $X_1, X_2, \dots,$ podle definice distribuční funkce a věty o úplné pravděpodobnosti[1]

$$\begin{aligned} F_T(x) = P[T < x] = & \\ &= P[T < x / X_1 < t_p] \cdot P[X_1 < t_p] + \\ &\quad + P[T < x / X_1 \geq t_p, X_2 < t_p] \cdot P[X_1 \geq t_p, X_2 < t_p] + \dots + \\ &\quad + P[T < x / X_1 \geq t_p, \dots, X_k \geq t_p, X_{k+1} < t_p] \cdot \\ &\quad \cdot P[X_1 \geq t_p, \dots, X_k \geq t_p, X_{k+1} < t_p] + \dots = \\ &= P[T < x / X_1 < t_p] \cdot p + P[T < x / X_1 \geq t_p, X_2 < t_p] \cdot pq + \dots + \\ &\quad + P[T < x / X_1 \geq t_p, \dots, X_k \geq t_p, X_{k+1} < t_p] \cdot pq^k + \dots . \end{aligned}$$

Počítáme dále podle definice podmíněné pravděpodobnosti s ohledem na nezávislost $X_1, X_2, \dots$

$$\begin{aligned} &P[T < x / X_1 \geq t_p, \dots, X_k \geq t_p, X_{k+1} < t_p] = \\ &P[kt_p + X_{k+1} < x / X_1 \geq t_p, \dots, X_k \geq t_p, X_{k+1} < t_p] = \\ &\quad = \frac{P[X_{k+1} < x - kt_p, X_1 \geq t_p, \dots, X_k \geq t_p, X_{k+1} < t_p]}{P[X_1 \geq t_p, \dots, X_k \geq t_p, X_{k+1} < t_p]} = \\ &\quad = \frac{P[X_{k+1} < \min(x - kt_p, t_p)] \cdot q^k}{q^k \cdot p}. \end{aligned}$$

[1]**věta o úplné pravděpodobnosti:** V pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ platí pro náhodné jevy $A, B_1, B_2, \dots \in \mathcal{S}$ za předpokladů $\cup B_k = \Omega, B_k \cap B_l = \emptyset$ pro $k \neq l, P(B_k) \neq 0$ rovnost $P(A) = \sum P(A/B_k) P(B_k)$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Po dosazení do předchozího vztahu obdržíme

$$
\begin{aligned}
F_T(x) = P[T < x] &= \sum_{k=0}^{\infty} P[X_{k+1} < \min(x - kt_p, t_p)] \cdot q^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} F(\min(x - kt_p, t_p)) \cdot q^k
\end{aligned}
$$

Distribuční funkci F_T lze rozepsat po intervalech

$$
F_T(x) = \begin{cases} F(x) & \text{na } (0; t_p) \\ F(t_p) + qF(x - t_p) & \text{na } (t_p; 2t_p) \\ F(t_p) + qF(t_p) + q^2 F(x - 2t_p) & \text{na } (2t_p; 3t_p) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \end{cases}
$$

Vzhledem ke spojitosti F_T obdržíme derivováním hustotu pravděpodobnosti f_T

$$
f_T(x) = \begin{cases} f(x) & \text{na } (0; t_p) \\ qf(x - t_p) & \text{na } (t_p; 2t_p) \\ q^2 f(x - 2t_p) & \text{na } (2t_p; 3t_p) \\ \dots\dots\dots\dots & \end{cases}
$$

Zbývá vypočítat střední hodnotu

$$
\begin{aligned}
ET &= \int_0^{\infty} x f_T(x)\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{kt_p}^{(k+1)t_p} q^k x f(x - kt_p)\, dx = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} q^k \int_0^{t_p} (x + kt_p) f(x)\, dx = \\
&= \left(\int_0^{t_p} x f(x)\, dx \right) \sum_{k=0}^{\infty} q^k + q t_p \left(\int_0^{t_p} f(x)\, dx \right) \sum_{k=0}^{\infty} k q^{k-1} \\
&= I \frac{1}{1-q} + p q t_p \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{I + q t_p}{p},
\end{aligned}
$$

(použili jsme vzorec pro součet geometrické řady $1 + q + q^2 + \cdots + q^k + \cdots = \frac{1}{1-q}$ a z něj derovováním odvozený vztah $1 + 2q + 3q^2 + \cdots + kq^{k-1} + \cdots = \frac{1}{(1-q)^2}$).

Integrál I lze upravit integrací po částech (per partes)

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{t_p} x f(x)\, dx = t_p F(t_p) - \int_0^{t_p} F(x)\, dx \\
&= t_p p - t_p + \int_0^{t_p} R(x)\, dx = -q t_p + \int_0^{t_p} R(x)\, dx,
\end{aligned}
$$

kde $R(x) = 1 - F(x)$ je tzv. funkce přežití. Pro střední hodnotu pak obdržíme vztah

$$
ET = \frac{1}{p} \int_0^{t_p} R(x)\, dx = \frac{\int_0^{t_p} R(x)\, dx}{1 - R(t_p)}.
$$